TRANSFORMATIONS DE FOURIER

AUTEUR

Thomas Salmon : Northeastern State University, États-Unis

RÉVISION PAR LES PAIRS

Scott Steinman : Southern California College of Optometry, États-Unis

CE CHAPITRE INCLUT UNE RÉVISION DE :

- L'analyse de Fourier
- Les caractéristiques des courbes sinusoïdales
- Les fonctions bidimensionnelles
- Les transformations de Fourier

ANALYSE DE FOURIER

Joseph Fourier (1768-1830) était un physicien mathématique dans l'armée de Napoléon et a été assigné à servir en Égypte. Lors de son séjour là-bas, il a étudié la propagation de la chaleur dans le sol et a développé une nouvelle technique pour analyser les fonctions mathématiques. Il a découvert que peu importe son degré de complexité, une fonction mathématique (c'est-à-dire toute courbe) peut être divisée (analysée) en composantes plus simples, qui sont des courbes sinusoïdales. Tout comme un mot peut être divisé en lettres, toute fonction mathématique peut être décomposée en éléments de base, soit les fonctions sinusoïdales. Avec 26 lettres, nous pouvons écrire n'importe quel mot ; de façon semblable, avec seulement des courbes sinusoïdales, nous pouvons créer n'importe quelle fonction, c'est-à-dire n'importe quelle courbe.

Figure 12-1 : *Joseph Fourier*

ANALYSE DE FOURIER (SUITE)

Une fonction mathématique est une série de nombres qui varient de façon systématique. On dit que les nombres varient en fonction d'un certain facteur, et on trace les données sur les axes x et y. Dans ce cas, on indique comment la valeur de la variable dépendante (montré par l'axe y) change en fonction de la valeur d'une variable indépendante (sur l'axe des x). On a déjà utilisé ce type de fonction unidimensionnelle pour étudier certains aspects de la vision, telles l'efficacité lumineuse, l'adaptation à la noirceur et la sensibilité spectrale des photorécepteurs. La fonction V(λ) du CIE 1924 est montrée dans la figure 12-2.

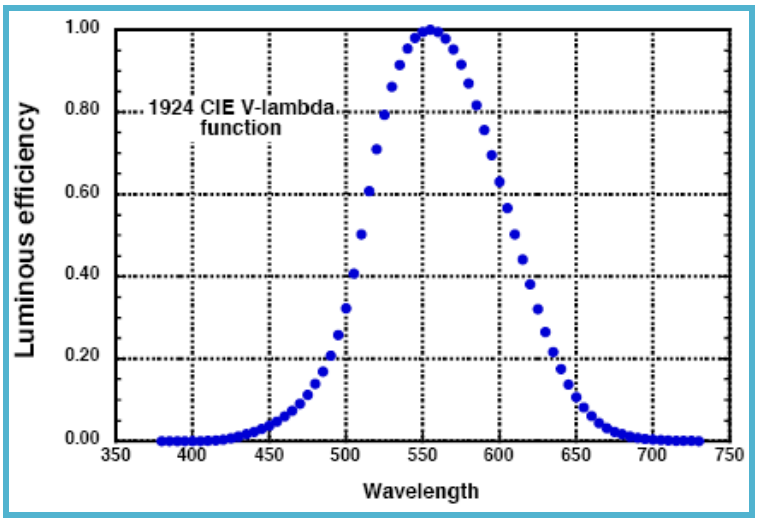

Figure 12-2 : *Fonction à une dimension*
Légende : luminous efficiency = efficacité lumineuse
wavelength = longueur d'onde

En utilisant l'analyse de Fourier, nous pourrions décomposer cette fonction (ou n'importe quelle autre fonction) en sous-composantes qui sont toutes des courbes sinusoïdales et qui varient en fréquence et en amplitude.

L'analyse de Fourier est utilisée pour analyser et étudier les fonctions dans plusieurs domaines des sciences, du génie et des affaires.

CARACTÉRISTIQUES DES FONCTIONS SINUSOÏDALES

La figure 12-3 démontre un exemple d'un réseau sinusoïdal et la figure 12-4 démontre son profil de luminance, qui est une courbe sinusoïdale.

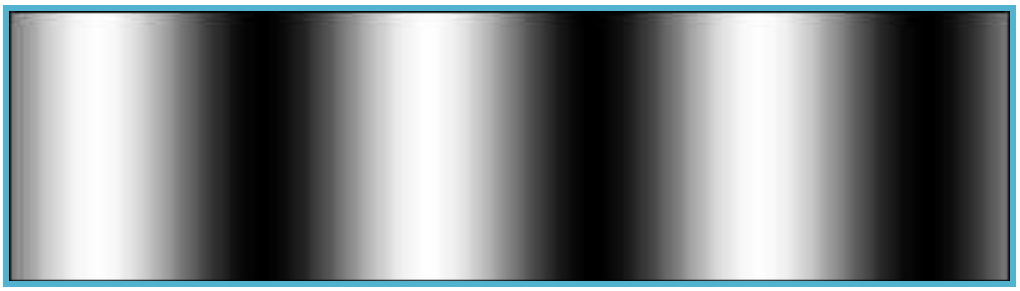

Figure 12-3 : *Fonction unidimensionnelle*

CARACTÉRISTIQUES DES FONCTIONS SINUSOÏDALES (SUITE)

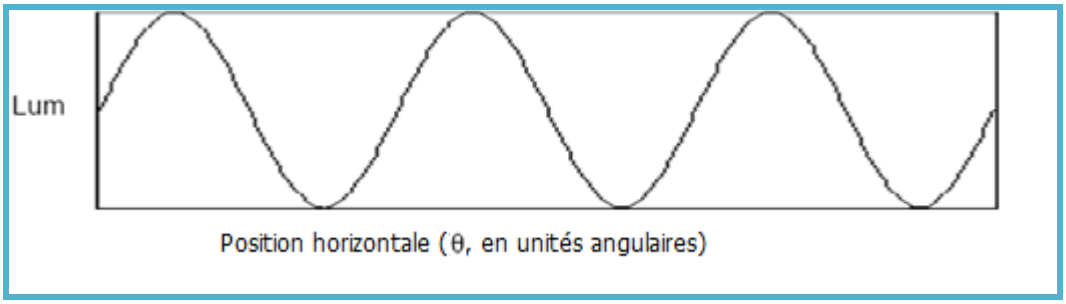

Figure 12-4 : *Profil de luminance du réseau sinusoïdal de la* ***figure 12-3***

Pour comprendre les caractéristiques de base des réseaux sinusoïdaux, considérons un profil de luminance comme celui démontré ci-haut, qui est une fonction unidimensionnelle. Un réseau sinusoïdal, de même que son profil de luminance unidimensionnel, qui est une courbe sinusoïdale, peuvent être altérés des façons suivantes :

- **Fréquence** – nombre de cycles contenus dans un temps défini (période)
- **Amplitude** – hauteur des pics et des vallées ; reliée au **contraste**
- **Phase –** l'onde est-elle déplacée vers la droite ou vers la gauche?

La formule de base pour une courbe sinusoïdale, par exemple la luminance (L) du patron ci-haut, en fonction de la position angulaire (θ), est :

$$L = \sin(\theta)$$

Dans ce cas, vous pourriez tracer la valeur de L sur l'ordonnée et la valeur de θ serait à l'abscisse. Une formule plus complète qui permet de modifier les attributs de base de la courbe sinusoïdale est la suivante :

$$L = \Delta I * \sin(f * \theta - p) + Lm$$

Où les variables représentent les valeurs suivantes :

L = valeur de luminance à un point de la courbe sinusoïdale
ΔI = différence entre le pic et la valeur moyenne (amplitude)
f = fréquence en nombre de cycles par degré
θ = position angulaire horizontale, en radians, ou angle visuel
p = déplacement de phase de la courbe sinusoïdale en entier
L_m = luminance moyenne

Nous étudierons comment les divers paramètres affectent l'apparence des courbes sinusoïdales et nous nous pencherons sur des exemples d'analyses de Fourier.

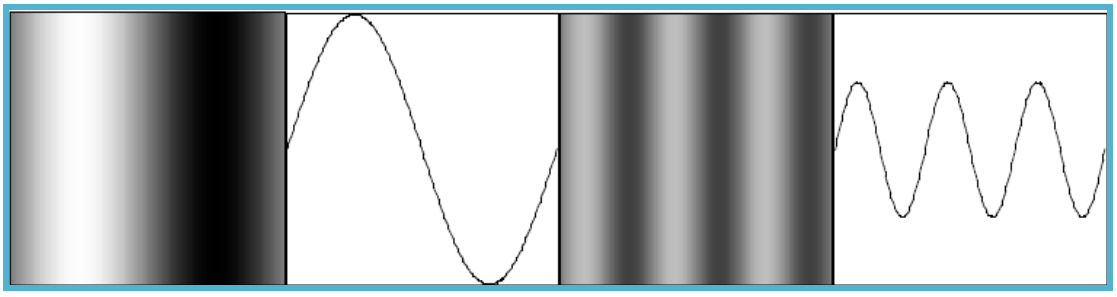

Figure 12-5 : *Exemples de réseaux sinusoïdaux orientés verticalement qui diffèrent en terme de contraste et de fréquence spatiale*

FONCTIONS BIDIMENSIONNELLES

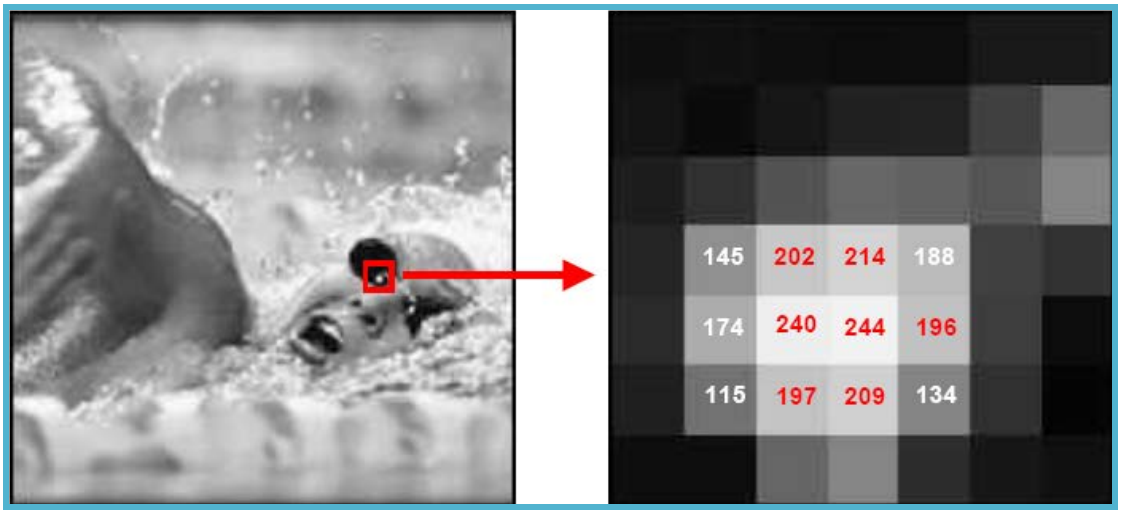

Figure 12-6 : *Image d'un nageur olympique (matrice de 256 x 256 avec 65 536 pixels) : les pixels magnifiés (droite) proviennent d'un point blanc sur le côté droit de la lunette. Les nombres démontrent les valeurs de luminosité de certains des pixels. Une valeur de 1 correspond au noir, 256 au blanc, et tout ce qui se trouve entre ces valeurs est un niveau de gris.*

Une **image** peut être décrite comme étant une fonction bidimensionnelle dans laquelle la luminance varie selon l'espace bidimensionnel. La matrice de données suivante montre les valeurs de l'échelle de gris prises dans la région entourant le point blanc dans la figure 12-6.

150	160	183	175	14143
145	202	214	188	158
174	240	244	196	14141
115	197	209	134	158
75	173	192	132	87

Les mêmes techniques que Joseph Fourier a développées pour travailler avec des fonctions unidimensionnelles peuvent être appliquées aux fonctions bidimensionnelles telles les images spatiales. Lorsque l'on fait une analyse de Fourier d'une fonction unidimensionnelle, nous la décomposons en ses composantes sinusoïdales, qui sont des courbes mathématiques. Lorsque l'on analyse une image bidimensionnelle, nous la décomposons en ses composantes de réseaux sinusoïdaux.

Ceci nous permet d'étudier la façon dont le système visuel traite toutes les images. Puisqu'il s'agit d'un système linéaire, la façon avec laquelle il traite les composantes des images (les réseaux sinusoïdaux) est la même que lorsqu'il traite les images qui sont faites de réseaux sinusoïdaux (c'est-à-dire toutes les images).

Questions de révision :

Q. Pourquoi dit-on que l'acuité visuelle de Snellen n'offre qu'une évaluation très limitée de la vision?

R. . _____

Q. Qu'est-ce qu'une fonction unidimensionnelle?

R. . _____

FONCTIONS BIDIMENSIONNELLES (SUITE)

Q. Pourquoi dit-on qu'une image est une fonction bidimensionnelle?
R. _____

Q. Pourquoi est-on intéressé à décomposer les images en éléments de base tels les réseaux sinusoïdaux?
R. _____

TRANSFORMATIONS DE FOURIER

Les transformations de Fourier sont un procédé qui calcule les fonctions sinusoïdales (les fréquences, magnitudes, phases, périodes) comprises dans une fonction mathématique. Dans le cas d'une image (fonction bidimensionnelle), elle calcule les réseaux sinusoïdaux compris dans la fonction. Ce procédé – la transformation de Fourier – prend une série de données entrantes et la transforme en une série appropriée de données sortantes, tel qu'illustré dans la figure 12-7.

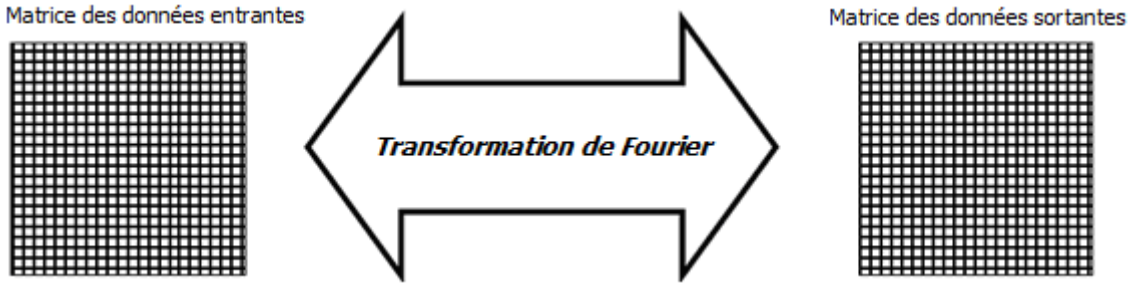

Figure 12-7 : *Les matrices d'entrée et de sortie sont liées par le procédé de la transformation de Fourier*

Certains procédés mathématiques transforment un nombre en une autre valeur correspondante, telle sa réciproque. Les transformations de Fourier agissent sur une série entière de données entrantes [f(x,y)] et calculent la série de données sortantes appropriée [F(u,v)] selon la règle mathématique suivante :

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-i2\pi(ux + vy)]dxdy$$

Il n'est pas nécessaire de comprendre comment la règle fonctionne pour comprendre ce qui arrive aux séries de données entrantes et sortantes. Dans le cas d'une image (une distribution bidimensionnelle de valeurs de luminance dans l'espace), elle transforme l'image en une matrice de données bidimensionnelles qui contient les informations sur les réseaux sinusoïdaux contenus dans l'image (fréquences spatiales, contrastes, orientations, décalage de phase). Les séries de données entrantes et sortantes sont reliées entre elles par le procédé de transformation de Fourier et sont parfois appelées **paires de transformées de Fourier**. Dans ce cas d'images, l'image spatiale et son spectre de fréquences spatiales sont des paires de transformées de Fourier (figure 12-8).

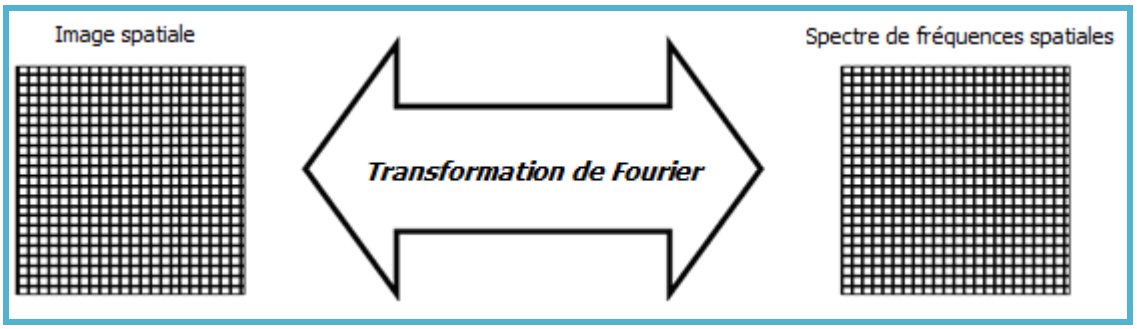

Figure 12-8 : *Une image spatiale et son spectre de fréquences spatiales – paires de transformées de Fourier*

TRANSFORMATIONS DE FOURIER (SUITE)

Un exemple d'une paire de transformées de Fourier (une image spatiale et son spectre de fréquences spatiales) est montré à la figure 12-9.

Figure 12-9 : *Une image spatiale (gauche) et son spectre de fréquences spatiales (droite)*

Quel est le lien entre ces procédés mathématiques et la vision? Il s'avère que les systèmes optiques, incluant l'œil humain, produisent des transformations de Fourier sur la lumière lorsqu'elle passe à travers le système. Par exemple, la distribution de la lumière à la pupille de sortie et l'image rétinienne sont des paires de transformées de Fourier. De plus, les scientifiques croient que le cerveau procède à une transformation de Fourier sur l'image rétinienne lors du processus de création de notre sens de la vision, c'est-à-dire qu'il prend l'image rétinienne, la décompose en réseaux sinusoïdaux qui sont compris dans l'image, envoie les données décrivant les réseaux au cerveau et réassemble les réseaux en l'image que nous percevons.

Ceci est illustré à la figure 12-10.

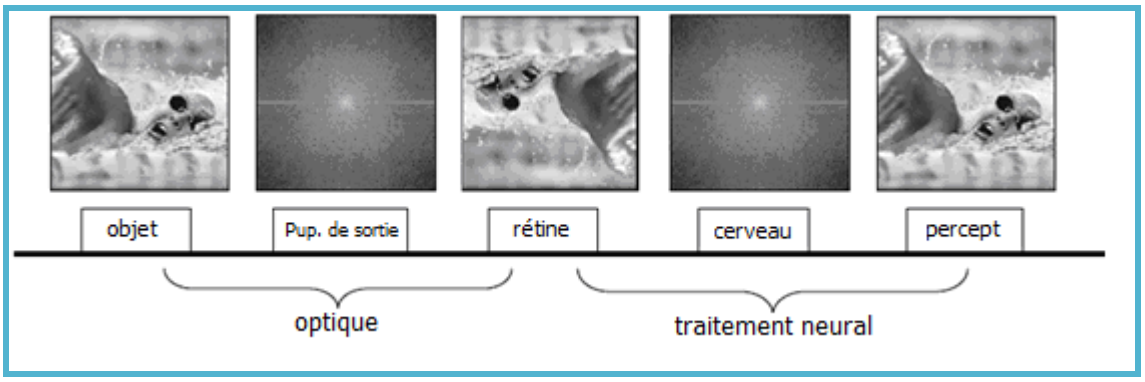

Figure 12-10 : *Transformations de Fourier dans le processus de la vision*